Ⅰ．運動量と力積

運動の激しさを表す量として<u>運動量</u>を<u>定義</u>する。

$$\vec{p} = m\vec{v} \cdots ①$$

運動方程式より

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \cdots ②$$

質量は定数なので

$$\int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\vec{v}}{dt}dt = \vec{F}dt \quad \rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{d(m\vec{v})}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \quad \rightarrow \quad m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \cdots ③$$

$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$ を力積と定義すると

$$\vec{I} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \cdots ④$$

<u>力積の分だけ運動量は変化する</u>ことを示している。

Ⅱ．仕事とエネルギー

（１）運動エネルギー

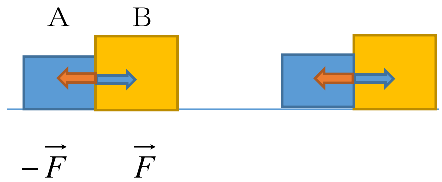
物体に力を加えて仕事Ｗをした場合

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}d\vec{r} \cdots ⑤$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \qquad d\vec{r} = \vec{v}dt$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\vec{v}dt = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right)dt = \frac{1}{2}m\vec{v}_2^{\,2} - \frac{1}{2}m\vec{v}_1^{\,2} \cdots ⑥$$

<u>仕事を加えた分だけ運動エネルギーは変化する</u>ことを意味する。



物体Ａが物体Ｂに力を加えて続けて静止するとき、物体Ａは物体Ｂから負の仕事を受けて静止する。

$$0 - \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \int_{r_1}^{r_2} (-\vec{F})d\vec{r} \cdots ⑦$$

$$\frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}d\vec{r} = W \cdots ⑧$$

物体Ａは静止するまでの間に物体Ｂに対して　$W = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$ の仕事をする能力、すなわちエネルギーを持っていたことになる。これを運動エネルギーという。

$$K = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$$

（２）位置エネルギー

周回積分について

$rot\vec{F}=0$　ならば

$$\oiint rot\vec{F}\cdot d\vec{s}=0 \Rightarrow \oint \vec{F}d\vec{r}=0 \Rightarrow \underset{\text{経路 I}}{\int_r^0 \vec{F}d\vec{r}} + \underset{\text{経路 II}}{\int_0^r \vec{F}d\vec{r}} = 0$$

$$\underset{\text{経路 I}}{\int_r^0 \vec{F}d\vec{r}} = -\underset{\text{経路 II}}{\int_0^r \vec{F}d\vec{r}}$$

$$\underset{\text{経路 I}}{\int_r^0 \vec{F}d\vec{r}} = \underset{\text{経路（−II）}}{\int_r^0 \vec{F}d\vec{r}}$$

このようにどの様な経路をたどろうとも力のなす仕事量が同じ時、その力を保存力という。
保存力の場合に位置エネルギーが定義される。

$$U(\vec{r})=\int_r^0 \vec{F}d\vec{r}=-\int_0^r \vec{F}d\vec{r}\cdots①$$

$$dU(\vec{r})=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz=-\left(F_x dx+F_y dy+F_z dz\right)\cdots②$$

$$dU(\vec{r})=gradU(\vec{r})d\vec{r}=-\vec{F}d\vec{r}$$

$$gradU(\vec{r})=-\vec{F}$$

$$\vec{F}=-gradU(\vec{r})\cdots③$$

この保存力のみが働く場合は

$$W=\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}d\vec{r}=\int_{r_1}^{0}\vec{F}d\vec{r}+\int_{0}^{r_2}\vec{F}d\vec{r}=\left(-\int_0^{r_1}\vec{F}d\vec{r}\right)-\left(-\int_0^{r_2}\vec{F}d\vec{r}\right)=U(\vec{r}_1)-U(\vec{r}_2)\cdots④$$

$$W=\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}d\vec{r}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\vec{v}dt=\int_{t_1}^{t_2}m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right)dt=\frac{1}{2}m\vec{v}_2^{\,2}-\frac{1}{2}m\vec{v}_1^{\,2}\cdots⑤$$

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_2^{\,2}-\frac{1}{2}m\vec{v}_1^{\,2}=U(\vec{r}_1)-U(\vec{r}_2)\cdots⑥$$

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_2^{\,2}+U(\vec{r}_2)=\frac{1}{2}m\vec{v}_1^{\,2}+U(\vec{r}_1)$$

$$E=\frac{1}{2}m\vec{v}_1^{\,2}+U(\vec{r}_1)=\frac{1}{2}m\vec{v}_2^{\,2}+U(\vec{r}_2)\cdots⑦$$

力学的エネルギーは保存される。

次に保存力以外の力がする仕事が移動経路により異なるときその力を非保存力という。
動摩擦力などが該当する。
非保存力のする仕事がW'であるとき

(1)の⑥と(2)の④を用いると以下の通りになる。

$$\frac{1}{2}m\vec{v_2}^2 - \frac{1}{2}m\vec{v_1}^2 = W + W' \cdots ⑧$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}m\vec{v_2}^2 - \frac{1}{2}m\vec{v_1}^2 = U(\vec{r_1}) - U(\vec{r_2}) + W' \cdots ⑨$$

$$\frac{1}{2}m\vec{v_2}^2 + U(\vec{r_2}) = U(\vec{r_1}) + \frac{1}{2}m\vec{v_1}^2 + W' \cdots ⑩$$

$$E_2 = E_1 + W' \qquad E_2 - E_1 = W' \cdots ⑪$$

非保存力のする仕事が負の場合、力学的エネルギーは減少する。