フーリエ級数

2022. 7. 4

鹿児島現代物理勉強会

御領　悟志

フーリエ級数とは

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\cdots+(a_m\cos mx+b_m\sin mx)$$

任意の関数は、正弦関数、余弦関数などの周期関数の重ね合わせによって表現することができる。これら周期関数の和によって表現する場合を、フーリエ級数という。

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)\quad\cdots①$$

フーリエ級数・準備(1)

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)=\sin\alpha\cos\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$
$$\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right)=\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)=2\cos\alpha\cos\beta$$
$$\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)=\cos\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$$
$$\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)=\sin\alpha\sin\beta$$

$n\neq 0$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx=\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{n}\left[\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{n}\left[\sin n\pi-\sin n(-\pi)\right]=\frac{2}{n}\sin n\pi=0$$

$n=0$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos 0\cdot x dx=\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi$$

$n\neq 0$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx=\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{n}\left[\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{n}\left[\cos n\pi-\cos n(-\pi)\right]=0$$

$n=0$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin 0\cdot x dx=\int_{-\pi}^{\pi}0 dx=0$$

フーリエ級数・準備(2)

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right)$$

$m \neq n$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx = 0$$

$m = n$ のとき

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx = 0 + \frac{1}{2}2\pi = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \pi\delta_{mn} \quad \cdots②$$

$$\cos mx \sin nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x - \sin(m-n)x\right)$$

$m \neq n$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x - \sin(m-n)x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x dx = 0$$

$m = n$ のとき

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0 \quad \cdots③$$

フーリエ級数・準備(3)

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right)$$

$m \neq n$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x dx = 0$$

$m = n$ のとき

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \quad \cdots ④$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right)$$

$m \neq n$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx = 0$$

$m = n$ のとき

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{1}{2}\left(\pi - (-\pi)\right) = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \pi\delta_{mn} \quad \cdots ⑤$$

フーリエ級数・準備(4)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 2\pi\delta_{0n}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \pi\delta_{mn}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \pi\delta_{mn}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin\ nx\, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$$

フーリエ級数・展開係数（1）

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos mx + b_m \sin mx\right)\cos nx dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + \sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(a_m \cos mx \cos nx + b_m \sin mx \cos nx\right)dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx \cos nx dx + b_m \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx \cos nx dx\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} 2\pi\delta_{0n} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \pi\delta_{mn} + b_m \cdot 0\right] = \pi a_0 \delta_{0n} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\pi a_m \delta_{mn}\right] = \pi a_0 \delta_{0n} + \pi a_n = \pi a_n$$

$n \geq 0$ のとき $\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$

フーリエ級数・展開係数(2)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\sin nx dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos mx + b_m \sin mx\right)\sin nx dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx + \sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(a_m \cos mx \sin nx + b_m \sin mx \sin nx\right)dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx \sin nx dx + b_m\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx \sin nx dx\right]$$

$$= \frac{a_0}{2}\cdot 0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \cdot 0 + b_m \cdot \pi\delta_{mn}\right] = \pi b_n$$

$n \geq 1$ のとき $\quad b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$

フーリエ級数・展開係数(3)

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos mx + b_m \sin mx\right)$$

$n \geq 0$ のとき $\quad a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$

$n \geq 1$ のとき $\quad b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$

フーリエ級数・複素数展開(1)

$$e^{imx} = \cos mx + i\sin mx \qquad e^{-imx} = \cos m(-x) + i\sin m(-x) = \cos mx - i\sin mx$$

$$e^{imx} + e^{-imx} = 2\cos mx$$

$$e^{imx} - e^{-imx} = 2i\sin mx$$

$$\cos mx = \frac{e^{imx} + e^{-imx}}{2} \qquad \sin mx = \frac{e^{imx} - e^{-imx}}{2i}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos mx + b_m \sin mx\right) \quad \cdots ①$$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \frac{e^{imx} + e^{-imx}}{2} + b_m \frac{e^{imx} - e^{-imx}}{2i}\right) \quad \cdots ②$$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left[e^{imx}\left(\frac{a_m - ib_m}{2}\right) + e^{-imx}\left(\frac{a_m + ib_m}{2}\right)\right] \quad \cdots ③$$

フーリエ級数・複素数展開（2）

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{m=1}^{\infty}\left[e^{imx}\left(\frac{a_m-ib_m}{2}\right)+e^{-imx}\left(\frac{a_m+ib_m}{2}\right)\right]$$

$$f(x)=e^{i0x}\left(\frac{a_0-ib_0}{2}\right)+\sum_{m=1}^{\infty}\left[e^{imx}\left(\frac{a_m-ib_m}{2}\right)+e^{-imx}\left(\frac{a_m+ib_m}{2}\right)\right] \quad \cdots④$$

$$f(x)=e^{i0x}\alpha_0+\sum_{m=1}^{\infty}\left[e^{imx}\alpha_m+e^{-imx}\alpha_{-m}\right]=e^{i0x}\alpha_0+\sum_{m=1}^{\infty}e^{imx}\alpha_m+\sum_{m=1}^{\infty}e^{-imx}\alpha_{-m}$$

$$=e^{i0x}\alpha_0+\sum_{m=1}^{\infty}e^{imx}\alpha_m+\sum_{m=-1}^{-\infty}e^{imx}\alpha_m \quad \cdots⑤$$

$$\therefore \quad f(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\alpha_m e^{imx} \quad \cdots⑥$$

$\alpha_0=\dfrac{a_0-ib_0}{2}$　ただし　$b_0=0$

$\alpha_m=\dfrac{a_m-ib_m}{2}$　$\alpha_{-m}=\dfrac{a_m+ib_m}{2}$　$\alpha_{-m}=\overline{\alpha_m}$

フーリエ級数・複素数展開(3)

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{imx} \quad \cdots⑥$$

$u_m = c_m e^{imx}$ を正規規格化直交系とすると

$$(u_m, u_m) = \int_{-\pi}^{\pi} c^*{}_m c_m e^{-imx} e^{imx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} c^2{}_m dx = 2c^2{}_m \pi = 1$$

$$c^2{}_m = \frac{1}{2\pi} \quad \therefore \quad c_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\therefore \quad u_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} \quad \cdots⑦$$

区間を $\pi \to l$ に拡大すると

$$u_m = c_m e^{i\frac{m}{l}\pi x}$$

$$(u_m, u_m) = \int_{-l}^{l} c^*{}_m c_m e^{-i\frac{m}{l}\pi x} e^{i\frac{m}{l}\pi x} dx = \int_{-l}^{l} c^2{}_m dx = 2c^2{}_m l = 1$$

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{2l}} \quad \therefore \quad u_m = \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{i\frac{m}{l}\pi x} \cdots⑧$$

$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m u_m$ と展開できるとすれば

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{i\frac{m}{l}\pi x} \cdots⑨$$

$$(u_m, f(x)) = \int_{-l}^{l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \frac{1}{\sqrt{2l}} \alpha_m e^{i\frac{m}{l}\pi x} e^{-i\frac{m}{l}\pi x} dx = \frac{\alpha_m}{2l} 2l = \alpha_m \cdots⑩$$

フーリエ変換(1)

$$\alpha_m = \left(u_m, f(x)\right) = \int_{-l}^{l} \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{-i\frac{m}{l}\pi x} f(x)dx \quad \cdots ⑩$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{i\frac{m}{l}\pi x}$$ に代入すると

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2l}} \left\{ \int_{-l}^{l} e^{-i\frac{m}{l}\pi x} f(x)dx \right\} e^{i\frac{m}{l}\pi x} \quad \cdots ⑪$$

$l \to \infty$ とおくと $\Delta k = \frac{\pi}{l} \to 0$

$k = m\Delta k \quad k = \frac{m\pi}{l}$

$$f(x) = \frac{1}{\Delta k} \frac{1}{2l} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)dx \right\} e^{ikx} \Delta k$$

$$f(x) = \frac{1}{\Delta k} \frac{1}{2l} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)dx \right\} e^{ikx} \Delta k$$

$$= \frac{l}{\pi} \frac{1}{2l} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)dx \right\} e^{ikx} \Delta k$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)dx \right\} e^{ikx} \Delta k$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)dx \right\} e^{ikx} \Delta k$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)dx \right\} e^{ikx} dk \quad \cdots ⑫$$

フーリエ変換(2)

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}f(x)dx\right\}e^{ikx}dk \quad \cdots ⑬$$

関数F(k)は、関数f(x)において変数kの各値が持つ重みを表している。その重みを正規規格化基底u(k)にかけて和を取るとき、すなわちkについて積分すると関数f(x)が求められる。

$F(k)$ を $f(x)$ についての

フーリエ変換という。

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}f(x)dx \quad \cdots ⑭$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(k)e^{ikx}dk \quad \cdots ⑮$$

フーリエ変換(3)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)dx\right\}e^{ikx}dk \quad \cdots⑯$$

関数F(k)は、関数f(x)において変数kの各値が持つ重みを表している。その重みを正規規格化基底u(k)にかけて和を取るとき、すなわちkについて積分すると関数f(x)が求められる。

$F(k)$ を $f(x)$ についての

フーリエ変換という。

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)dx \quad \cdots⑰$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk \quad \cdots⑱$$