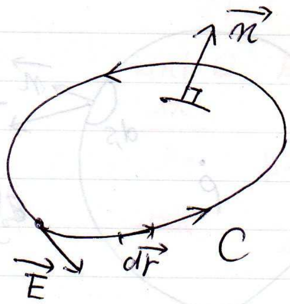
## [電磁誘導] Faradayの法則

$$\Phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} \quad (\text{磁束})$$




$$V = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$= -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad \text{—①}$$

曲線Cに沿っての $\vec{E}$ とおくと

$$V = \int \vec{E}\cdot d\vec{r} \quad \text{—②}$$

①, ② より

$$-\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \int \vec{E}\cdot d\vec{r} \quad \text{—③}$$

ストークスの定理より

$$-\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \int \mathrm{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{S} \quad \text{—④}$$

$$\int \left(\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) d\vec{S} = 0 \quad \text{—⑤}$$

⑤が常に成立するには

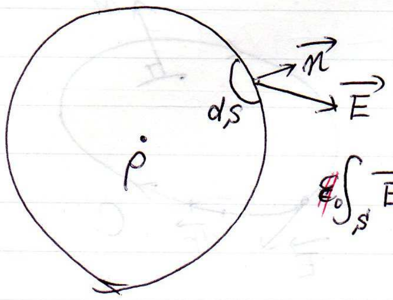
$$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{—⑥}$$

$$\therefore \ \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{—⑦}$$

No.

Date

$$E \cdot 4\pi r^2 = k\frac{q}{r^2} \times 4\pi r^2$$




$$\varepsilon_0 \oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \int \rho\, dv$$

ガウスの発散定理より

$$\varepsilon_0 \oint_S \vec{E}\,\vec{n}\,dS = \int_V \varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\vec{E}\,dv = \int_V \rho\, dv$$

$$\int (\mathrm{div}\,\varepsilon_0\vec{E} - \rho)\,dv = 0$$

$$\mathrm{div}\,\varepsilon_0\vec{E} = \rho$$

$\vec{E} = -\nabla\varphi$ のとき

$$-\varepsilon_0\oint_S \nabla\varphi\cdot\vec{n}\,dS = \int_V \nabla^2\varphi\,dv = \int_V \rho\,dv$$

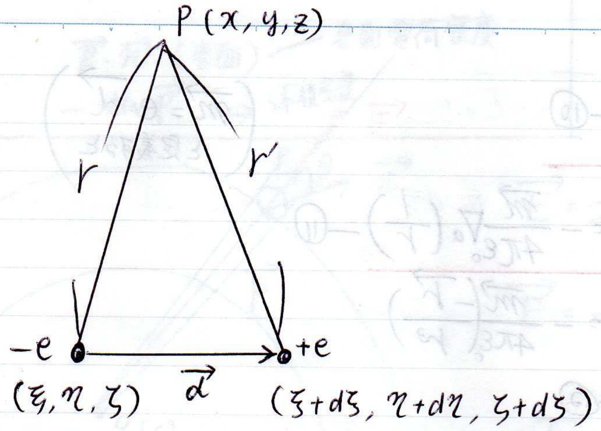
$$\int_V \left(-\nabla^2\varphi - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) dv = 0 \qquad -\nabla^2\varphi - \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ ポアソン方程式

equation

Uoisson

[二重湧点]




$$\vec{d} = (d\xi, d\eta, d\zeta)$$

$$4\pi k Q = ES$$

$$\frac{4\pi}{\varepsilon_0}$$

$$k\frac{q}{r^2} \times 4\pi r^2 = ES$$

$$\cancel{4\pi k}$$

$$4\pi k q = ES$$

$$\frac{q}{\varepsilon_0} = ES$$

$$4\pi k = \frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

P点の電位

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e}{r'} - \frac{e}{r}\right) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) \text{ — ①}$$

ここで
$$\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) = \nabla_s\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{d} \text{ — ②}$$

s 湧点側

$$\sqrt{\quad} \qquad (\quad)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \text{ — ③}$$

P点
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{2(x-\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}^{\,3}} \text{ — ④}$$

$$= -\frac{(x-\xi)}{r^3}$$

$$\nabla_a\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3} \text{ — ⑤}$$

二重湧点では

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{-2(x-\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}^{\,3}} \text{ — ⑥}$$

$$= \frac{(x-\xi)}{r^3} \text{ — ⑦}$$

$$\therefore\ \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \text{ — ⑧}$$

$$\nabla_s\left(\frac{1}{r}\right) = -\nabla_a\left(\frac{1}{r}\right) \text{ — ⑨}$$

No.

Date

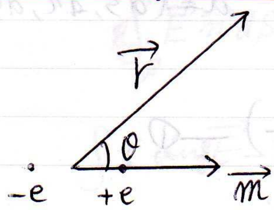
$$\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\vec{d}\cdot\nabla_s\left(\frac{1}{r}\right) \quad —⑩$$

$\left(\vec{m} = e\cdot\vec{d}\right.$ と定義すると$\left.\right)$

$$= \frac{\vec{m}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\nabla_s\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{m}}{4\pi\varepsilon_0}\nabla_a\left(\frac{1}{r}\right) \quad —⑪$$

$$= -\frac{\vec{m}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$\varphi = \frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad —⑫$$



$$\varphi = \frac{m\cdot r}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cos\theta \quad —⑬$$

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta\vec{m}}{\Delta v} \quad —⑭$$

$$\Delta\vec{m} = \vec{P}\cdot\Delta v \quad —⑮ \text{ より}$$

$$\varphi = \int_V \frac{\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\nabla_s\left(\frac{1}{r}\right)dv \quad —⑯$$

$$\mathrm{div}\left(\frac{\vec{P}}{r}\right) = \frac{1}{r}\mathrm{div}\vec{P} + \vec{P}\cdot\nabla_s\left(\frac{1}{r}\right) \quad —⑰$$

$$\vec{P}\cdot\nabla_s\left(\frac{1}{r}\right) = \mathrm{div}\left(\frac{\vec{P}}{r}\right) - \frac{\mathrm{div}\vec{P}}{r} \quad —⑱$$

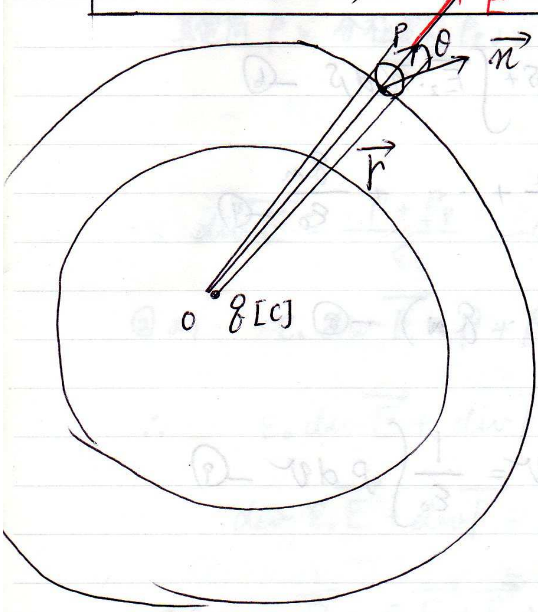
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \mathrm{div}\left(\frac{\vec{P}}{r}\right)dv - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{div}\vec{P}}{r}dv \quad —⑲$$

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\vec{P}\cdot\vec{n}}{r}\cdot dS + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{(-\mathrm{div}\vec{P})}{r}dv} \quad —⑳$$

## (結論) conclution

$\vec{P}\cdot\vec{n}$ (表面) — 表面電荷密度
$-\mathrm{div}\vec{P} \longrightarrow$ 体積密度 — (21)

［ガウスの法則］



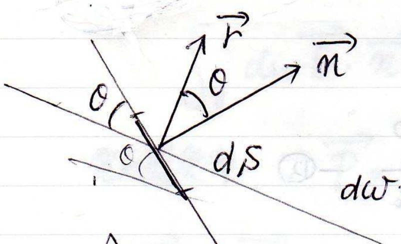

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{E}=\frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad \text{—①}$$

$\vec{r} \longrightarrow (0\rightarrow P$の向き$)$

$$\vec{E}\cdot\vec{n}\,dS \text{ —}$$
$$=\frac{q\,\vec{r}\cdot\vec{n}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot dS \quad \text{—②}$$

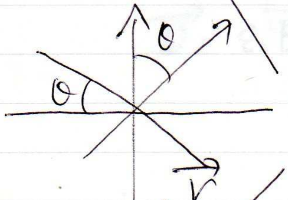
$\vec{r}$ と $\vec{n}$ のなす角を $\theta$とする



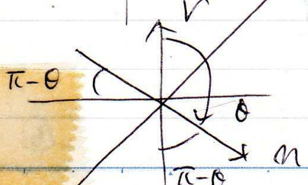

$$=\frac{q\,r\cos\theta\cdot dS}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{q\,dS\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ $\cos\theta>0$, $d\omega>0$

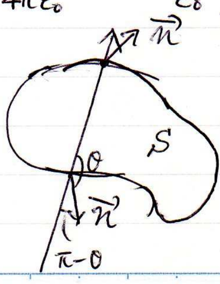
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\omega$$ 立体角 $\cos\theta<0$, $d\omega<0$ —③

$$d\omega=\frac{dS\cos\theta}{r^2}$$




$$=\int_S\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\omega=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi=\frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{—④}$$




$d\ \ = dS\cos(\pi-\theta)=-dS\cos\theta$

$$\int\vec{E}\cdot\vec{n}\,dS=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

閉曲面内では $d\omega>0$
外 〃 $d\omega<0$

No.

Date

$$\int (\vec{E_1} + \vec{E_2} + \vec{E_3} + \cdots \vec{E_n}) \vec{n} \cdot dS \quad ⑤$$

$q_3$

$q_1 \quad q_2$

$$= \int \vec{E_1} \cdot \vec{n} \cdot dS + \int \vec{E_2} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad ⑥$$

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} + \cdots + \vec{E_n} = \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} + \cdots + \frac{q_n}{\varepsilon_0} \quad ⑦$$

$$\int \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0} (q_1 + q_2 + \cdots q_n) \quad ⑧$$

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_V \mathrm{div} \vec{E} \cdot dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho \, dv \quad ⑨$$

$$\int_S (\mathrm{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}) = 0$$

$$\boxed{\mathrm{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad ⑩$$

$\vec{E} = -\nabla \varphi$ とおけば ⑪

$$\mathrm{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \nabla(-\nabla \varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad ⑫$$

$$-\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad ⑬$$

Poisson equation

No.

Date

$$\int(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+\cdots\vec{E}_n)\vec{n}\cdot dS \quad ⑤$$

$q_3$

$q_1$ $q_2$

$$=\int\vec{E}_1\vec{n}\cdot dS+\int\vec{E}_2\cdot\vec{n}\cdot dS \quad ⑥$$

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n=\frac{q_1}{\varepsilon_0}+\frac{q_2}{\varepsilon_0}+\cdots+\frac{q_n}{\varepsilon_0} \quad ⑦$$

$$\int\vec{E}\cdot\vec{n}\cdot dS=\frac{1}{\varepsilon_0}(q_1+q_2+\cdots q_n) \quad ⑧$$

$$\int_S\vec{E}\cdot\vec{n}\cdot dS=\int_V \mathrm{div}\,\vec{E}\cdot dv=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho\, dv \quad ⑨$$

$$\int_S\left(\mathrm{div}\,\vec{E}-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)=0$$

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad ⑩$$

$\vec{E}=-\nabla\varphi$ とおけば ⑪

$$\mathrm{div}\,\vec{E}=\nabla\cdot\vec{E}=\nabla(-\nabla\varphi)=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad ⑫$$

$$-\nabla^2\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

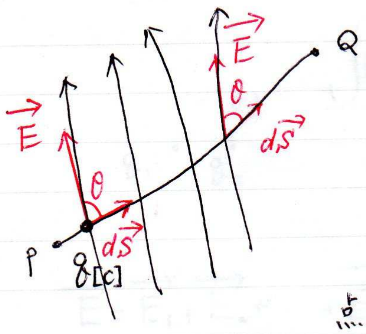
$$\boxed{\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad ⑬$$

Poisson equation

No.

Date H20. 4. 27

[電位]

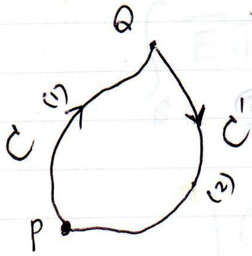



q[c]の点電荷が電場 $\vec{E}$ の中を $d\vec{s}$ だけ変位するとき 電場に力のなす仕事

$$dW = qE \cdot ds\cos\theta = q\vec{E}\cdot d\vec{s} \quad —①$$

点Pから点Qまで点電荷 q の変位した時の 電場のなす仕事 W

$$W = \int_P^Q qE\cos\theta\, ds = q\int_P^Q E\cos\theta\, ds = \int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{s} \quad —②$$




$$q\int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{s} = q\int_P^O \vec{E}\cdot d\vec{s} + q\int_O^Q \vec{E}\cdot d\vec{s} \quad —③$$

$$= q\int_P^O \vec{E}\cdot d\vec{s} - q\int_Q^O \vec{E}\cdot d\vec{s} \quad —④$$

$$\boxed{\phi = \frac{W}{q} = \int_P^O \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_O^P \vec{E}\cdot d\vec{s} \quad —⑤}$$

$\phi$：点Pの電位　　経路によらない位置の一価関数

- Pから基準点Oまで移動するとき場のなす仕事
- O 〃 P点まで移動するとき外力のなす仕事

点PとQの電位差

$$\phi_P - \phi_Q = \int_P^O \vec{E}\cdot d\vec{s} - \int_Q^O \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_P^O \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_O^Q \vec{E}\cdot d\vec{s} \quad —⑥$$

$$\boxed{\therefore\ \phi_P - \phi_Q = \int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{s} \quad —⑦}$$

$$\int_{C\ P}^{Q} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_{C'\ Q}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0 \text{ のとき} \quad —⑧$$

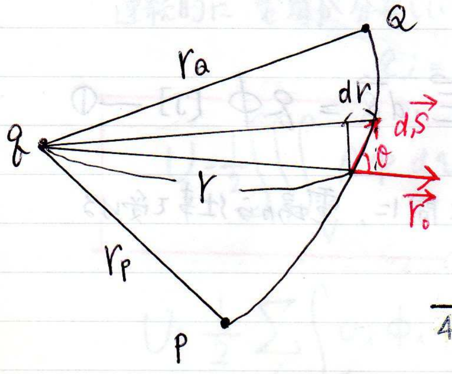
$$\int_{C\ P}^{Q} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_{C'\ Q}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{-C'\ P}^{Q} \vec{E}\cdot d\vec{s} \quad —⑨$$

電場のなす仕事が 経路Cと 経路$-C'$どちらでも同じで
経路によらず 位置Pのみの関数となる。

$$\oint_{C+C'} \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0 \quad —⑩ \text{ より}$$

$$\int_S \mathrm{rot}\,\vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = 0 \qquad \therefore\ \mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \quad —⑪$$

電場が保存則である 必要充分条件 ⑪ となる。




$$\int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_P^Q \frac{\vec{r_0}}{r^2}\cdot d\vec{s} \quad —⑫$$

$d\vec{s}\cdot\vec{r_0} = dr$ より

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_P^Q \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_P^Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_Q}\right] \quad —⑬$$

No.

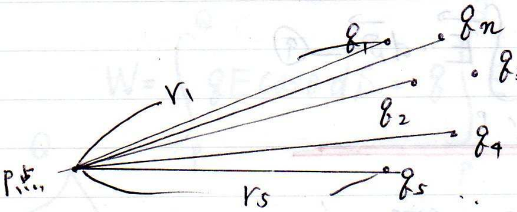
Date

基準点Oを無限遠にとると

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right] \text{ — ⑭}$$

$r_0 \to \infty$ とおけば

$$\boxed{\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\ [V]} \text{ — ⑮}$$

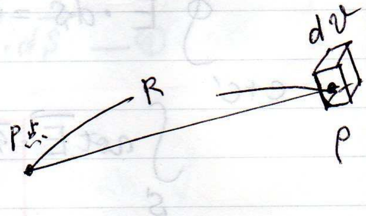



点電荷による電位 φ

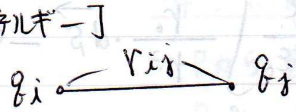
$$\boxed{\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}\ [V]} \text{ — ⑯}$$

連続電荷による電位 φ

$$\boxed{\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho}{R}\,dv} \text{ — ⑰}$$




[エネルギー]




$$W = q\int_P^O \vec{E}\cdot d\vec{S} = q\phi\ [J] \text{ — ①}$$

点Pに存在する電荷qは、基準点Oまで行く間に、電場から仕事を受ける

これだけのエネルギーを蓄えることになる

$$\boxed{U = q\phi\ [J]} \text{ — ②}$$

Date H20 4 28

点電荷間の相互作用のエネルギー

$$U_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_i\cdot q_j}{r_{ij}}\ [\mathrm{J}] \quad ③$$

点電荷系の($q_1, q_2, q_3 \cdots\cdots, q_n$)の全電荷間の相互作用エネルギーの総和は

$$U = \sum_{i>j} U_{ij} \quad ④$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i\sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_i\cdot q_j}{r_{ij}} \quad ⑤$$

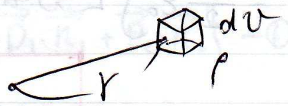
$i\ j$の($ij$, $ji$)の2通りがあるのでそれを半分にする

$$= \frac{1}{2}\sum_i q_i\left(\sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_j}{r_{ij}}\right) = \frac{1}{2}\sum_i q_i\phi_i \quad ⑥$$

$$\left(\phi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}\frac{q_j}{r_{ij}}\right)$$ とおく

$q_j$により作られる電位

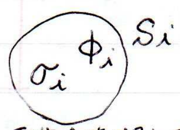
$$\boxed{U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\phi_i}$$



連続的に電荷が分布しているとすれば

$$q_i = \rho\, dv$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\iiint_V \rho\phi\, dv}$$



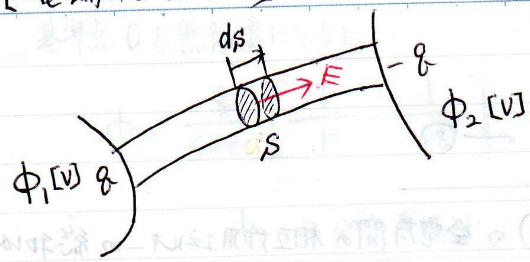
導体に電荷分布するとすれば
全電荷 $Q_i$

$$U = \frac{1}{2}\sum_i\int_{S_i}\sigma_i\phi_i\, dS = \frac{1}{2}\sum_i\phi_i\int_{S_i}\sigma_i\, dS = \frac{1}{2}\sum_i\phi_i Q_i$$

No.

Date H20 4 28

[電場のエネルギー]　　　初等的な理解




電場のエネルギー

$U = \frac{1}{2} q \phi$ より

$= \frac{1}{2} q \phi_1 - \frac{1}{2} q \phi_2 = \frac{1}{2} q(\phi_1 - \phi_2)$ —①

$\phi_1 - \phi_2 = \int E \cdot ds$ —② より

$U = \frac{1}{2} q \int E \cdot ds$ —②

電気力管の性質より

$ES = \frac{q}{\varepsilon_0}$ —③　　$\therefore$ $q = \varepsilon_0 E \cdot S$ —④

$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 ES \int E \cdot ds$

$S \cdot ds = dv$ より

$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int E^2 S \cdot ds = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \iiint_V E^2 dv$

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \iiint_V \varepsilon_0 E^2 dv \ [\mathrm{J}]} \text{ —⑤}$$

この電気力管の空間内の単位体積当り

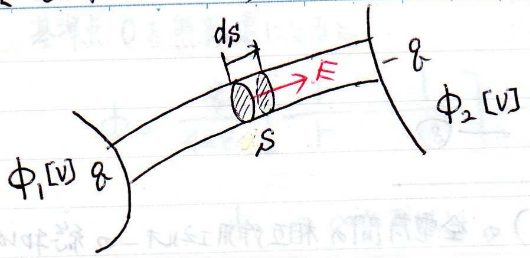
$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$ [J] の エネルギーが 分布しているものと

考えることが出来る.

No.

Date H20 4 28

[電場のエネルギー]　　　　初等的な理解




電場のエネルギー

$$U = \frac{1}{2}q\phi \text{ より}$$

$$= \frac{1}{2}q\phi_1 - \frac{1}{2}q\phi_2 = \frac{1}{2}q(\phi_1 - \phi_2) \quad \text{—①}$$

$$\phi_1 - \phi_2 = \int E \cdot ds \quad \text{—② より}$$

$$U = \frac{1}{2}q\int E \cdot ds \quad \text{—②}$$

電気力管の性質より

$$ES = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{—③} \qquad \therefore \ q = \varepsilon_0 E \cdot S \quad \text{—④}$$

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 ES\int E \cdot ds$$

$S \cdot ds = dv$ より

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\int E^2 S \cdot ds = \frac{1}{2}\varepsilon_0\iiint_V E^2 dv$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\iiint_V \varepsilon_0 E^2 dv \ [J] \quad \text{—⑤}}$$

この電気力管の空間内の単位体積当り

$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ [J] のエネルギーが分布しているものと

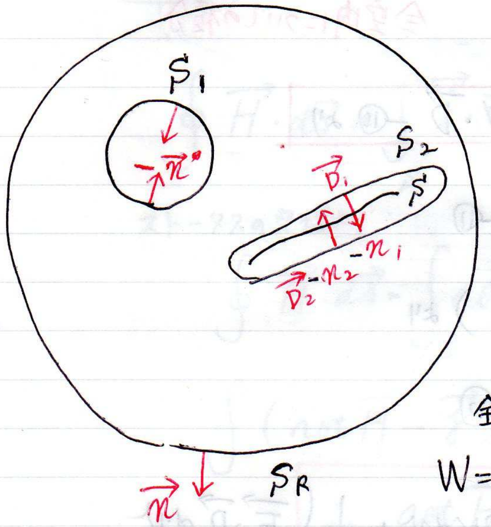
考えることが出来る。

No.
Date

(一般的な証明)

誘電体が電界内にある時，その真電荷の体積密度を $\rho$，電束密度 $\vec{D}$ の不連続面における真電荷の面積密度を $\sigma$ とする。

真電荷のない状態から、現在の帯電状態までに要する仕事 $\longrightarrow$ 誘電体のある場合の電界のエネルギー




誘電体 微小部分 $dv$ の電位 $V$

〃 電荷 $\rho dv$

energy $\frac{1}{2}\rho V dv$ —①

$\vec{D}$ の不連続面 $dS$ のエネルギー

$\frac{1}{2}\sigma V dS$ —②

全範囲にわたる積分より

$$W = \frac{1}{2}\int \rho V dv + \frac{1}{2}\int \sigma V dS \quad —③$$

③の第2項の面積分

$$\frac{1}{2}\int_{S_1} \sigma V dS + \frac{1}{2}\int_{S_2} \sigma V dS \quad —④$$

$S_1$ 上 $\sigma = \vec{D}\cdot(-\vec{n}) = -\vec{D}\cdot\vec{n}$ —⑤

外向きの法線ベクトルを正とおくと 内向きは $-\vec{n}$ となる

$S_2$ 上 $\sigma = \vec{D}_1(-\vec{n}_1) + \vec{D}_2(-\vec{n}_2) = -\{\vec{D}_1\cdot\vec{n}_1 + \vec{D}_2\cdot\vec{n}_2\}$ —⑥

$S_1 + S_2$ の面積分

$$-\frac{1}{2}\int_{S_1+S_2} V\cdot\vec{D}\cdot\vec{n}\, dS \quad —⑦$$

ガウスの発散定理より 全曲面について

$$\int_{S_R} V\vec{D}\cdot\vec{n}\, dS + \int_{S_1+S_2} V\cdot\vec{D}\cdot\vec{n}\, dS = \int_V \mathrm{div}(V\vec{D})\, dv \quad —⑧$$

No.

Date

半径 $R \longrightarrow \infty$　$S_R$上での電界 0　$\int_R$ は 0とみなせる!
(∵ 電界は有限分布)

$$\therefore \int_{S_1+S_2} V\vec{D}\cdot\vec{n}\,dS = \int_V \mathrm{div}\,(V\vec{D})\,dv \quad \text{—⑨}$$

全空間についての積分.

ベクトル公式より

$$\boxed{\mathrm{div}\,(V\vec{D}) = V\,\mathrm{div}\,\vec{D} + \nabla\cdot V\cdot\vec{D} \quad \text{—⑩ より}}$$

$$= \int (V\,\mathrm{div}\,\vec{D} + \nabla V\cdot\vec{D})\,dv \quad \text{—⑪}$$

$$\left(\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \quad \vec{E} = -\nabla V\right) \text{より}$$

$$= \int \rho V\,dv - \int \vec{E}\cdot\vec{D}\,dv \quad \text{—⑫}$$

⑫ より

$$-\frac{1}{2}\int_{S_1+S_2} V\vec{D}\cdot\vec{n}\,dS = -\frac{1}{2}\int \rho V\,dv + \frac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}\,dv \quad \text{—⑬}$$

③に代入すると

$$W = \cancel{\frac{1}{2}\int \rho V\,dv} - \cancel{\frac{1}{2}\int \rho V\,dv} + \frac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}\,dv \quad \text{—⑭}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}\,dv} \quad \text{—⑮}$$

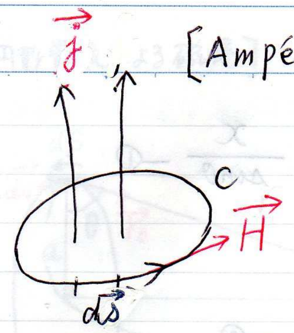
等方体のとき $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int \varepsilon\vec{E}^2\,dv} \quad \text{—⑯}$$

No.

Date H20 4 29.

[Ampére の法則]




$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{s} = \int_S \vec{j}\cdot\vec{n}\,dS \quad \text{—①}$$

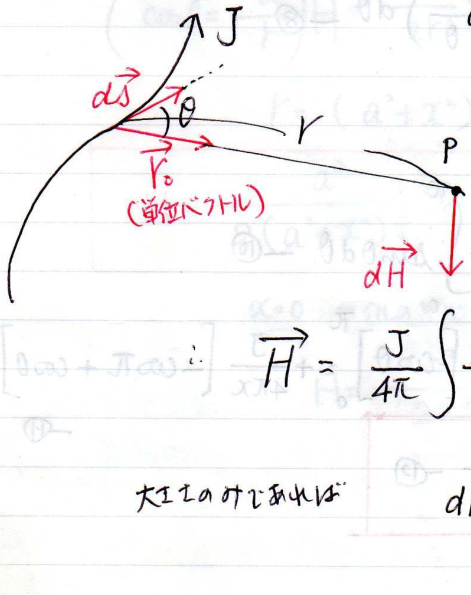
ストークスの定理より

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{s} = \int_S \mathrm{rot}\,\vec{H}\cdot\vec{n}\,dS = \int_S \vec{j}\cdot\vec{n}\cdot dS \quad \text{—②}$$

$$\int (\mathrm{rot}\,\vec{H} - \vec{j})\cdot\vec{n}\cdot dS = 0 \quad \text{—③}$$

$$\boxed{\therefore\ \mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}}$$

[Biot-Savart の法則]




$$d\vec{H}(P) = \frac{1}{K}\,\frac{J\,d\vec{s}\times\vec{r_0}}{r^2} \quad \text{—①}$$

の総和

$$\vec{H}(P) = \int d\vec{H}(P) \quad \text{—②}$$

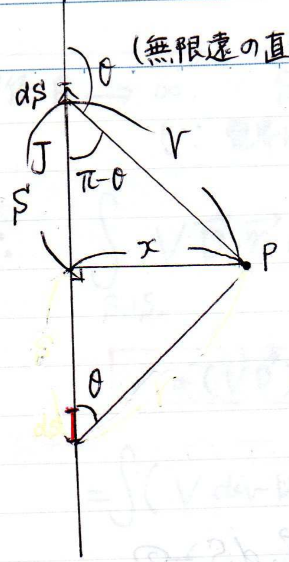
MKSA単位系では $K = 4\pi$

$$\therefore\ \vec{H} = \frac{J}{4\pi}\int \frac{d\vec{s}\times\vec{r_0}}{r^2} \quad \text{—③}$$

大きさのみであれば $$dH = \frac{J}{4\pi}\cdot\frac{ds\,\sin\theta}{r^2} \quad \text{—④}$$

Date H20 4 29

[無限遠の直線電流による磁場]




$r\sin\theta = x$ より $\quad r = \dfrac{x}{\sin\theta}$ —①

$$\tan(\pi-\theta) = \frac{x}{S} \quad \text{—②}$$

$$S = \frac{-x}{\tan\theta} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}x \quad \text{—③}$$

$$\frac{dS}{d\theta} = -\frac{(\cos\theta)'\sin\theta - \cos\theta(\sin\theta)'}{\sin^2\theta}\cdot x$$

$$= -\frac{-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\sin^2\theta}\cdot x = +\frac{x}{\sin^2\theta} \quad \text{—④}$$

P点の磁場 dH

$$dH = \frac{J}{4\pi}\cdot\frac{dS\sin\theta}{r^2} \quad \text{—⑤}$$

④より $\quad dS = +\dfrac{x}{\sin^2\theta}d\theta$ —⑥ $\qquad r^2 = \dfrac{x^2}{\sin^2\theta}$ —⑦ を⑤へ代入

$$dH = \frac{J}{4\pi}\cdot\frac{\sin\theta}{\frac{x^2}{\sin^2\theta}}\times\left(+\frac{x}{\sin^2\theta}\right)d\theta \quad \text{—⑧}$$

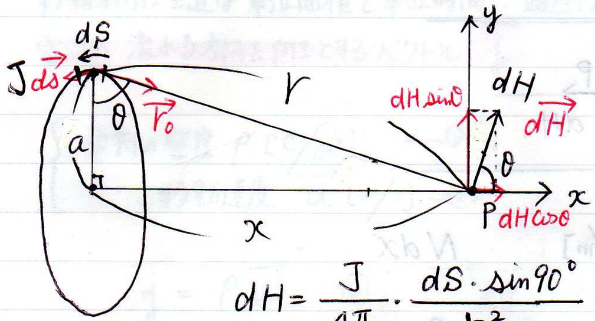
$$dH = \frac{+J}{4\pi}\cdot\frac{\sin\theta}{x}d\theta \quad \text{—⑨}$$

$$H = \int dH = \frac{+J}{4\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\theta}{x}d\theta = +\frac{J}{4\pi x}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \quad \text{—⑩}$$

$$= +\frac{J}{4\pi x}\Big[-\cos\theta\Big]_0^\pi = +\frac{J}{4\pi x}\Big[-\cos\pi + \cos 0\Big] \quad \text{—⑪}$$

$$\boxed{H = \frac{J}{2\pi x}} \quad \text{—⑫}$$

[円形電流による磁場]




dS と r は垂直である。

$$dH = \frac{J}{4\pi} \cdot \frac{dS \cdot \sin 90^\circ}{r^2} \quad —①$$

y方向の磁場は対称で打ち消し合うので x方向の成分のみ残る

$$H = \oint dH \cos\theta = \frac{J}{4\pi} \oint_0^{2\pi a} \frac{dS \cos\theta}{r^2} \quad —②$$

$$= \frac{J}{4\pi} \cdot \frac{\cos\theta}{r^2} \oint_0^{2\pi a} dS = \frac{J}{\cancel{4\pi}_{2}} \cdot \frac{\cos\theta}{r^2} \cdot \cancel{2\pi} a \quad —③$$

$$= \frac{Ja}{2r^2} \cos\theta \quad —④$$

$$\left(\cos\theta = \frac{a}{r}\right) H = \frac{Ja}{2r^2} \times \frac{a}{r} = \frac{Ja^2}{2r^3} \quad —⑤$$

$r = (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ を代入

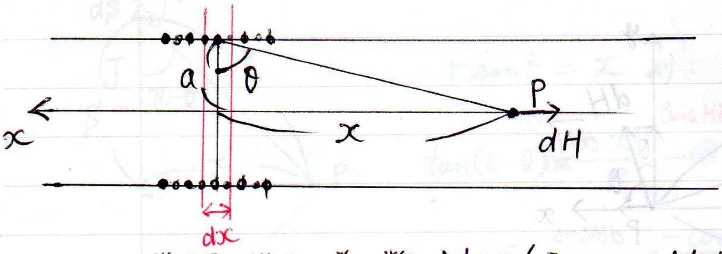
$$\boxed{H = \frac{a^2}{2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} J \quad —⑥}$$

$x = 0$ コイルの中心では

$$H = \frac{a^2}{2a^3} J = \frac{J}{2a} \ [\mathrm{A/m}]$$

Date H20 4 29

[無限ソレノイド]




単位長さ当りの 巻き数 N[回/m]　　$N\,dx$

$$dH=\frac{a^2J}{2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot N\cdot dx \quad ①$$

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}dH=\frac{a^2JN}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad ②$$

$$\tan\theta=\frac{x}{a} \quad ③$$

$x=a\tan\theta$ より

$$=(a^2+x^2)=a^2+a^2\tan^2\theta=a^2(1+\tan^2\theta)=\frac{a^2}{\cos^2\theta} \quad ④$$

$$\frac{dx}{d\theta}=a\frac{1}{\cos^2\theta} \quad ⑤$$

$$dx=\frac{a\,d\theta}{\cos^2\theta} \quad ⑥$$

$$H=\frac{a^2JN}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\left(\frac{a^2}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}\times\frac{a\,d\theta}{\cos\theta} \quad ⑦$$

$$=\frac{a^2JN}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{a^{\cancel{3}\,2}}{\cos^3\theta}}\times\frac{\cancel{a}}{\cos^2\theta}d\theta \quad ⑧$$

$$=\frac{a^2JN}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{a^2}d\theta=\frac{JN}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=\frac{JN}{2}\Big[+\sin\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \quad ⑨$$

$$=\frac{JN}{2}\times 2=JN \quad ⑩$$

$$\therefore \boxed{H=N\cdot J}$$

No.

Date

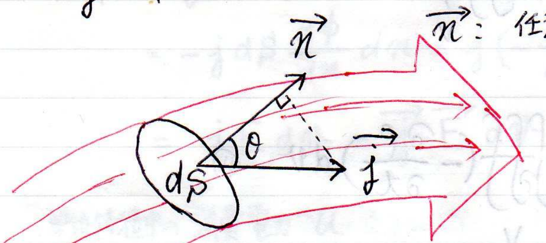
[電流]

移動方向に垂直な単位面積を単位時間に通過する電気量 → 電流密度
電流が流れる方向を向きとするベクトル $\vec{j}$

$$\begin{cases} \text{電荷の密度 } \rho \ [C/m^3] & —① \\ \text{〃 移動速度 } \vec{u} \ [m/s] & —② \end{cases}$$

$$\vec{j} = \rho \vec{u} \quad —③$$

$\vec{n}$: 任意の $dS$ 面の法線



$dS$ を単位時間当りに通過する電気量 $dJ$ [C/s]

$$dJ = \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS \quad —④$$

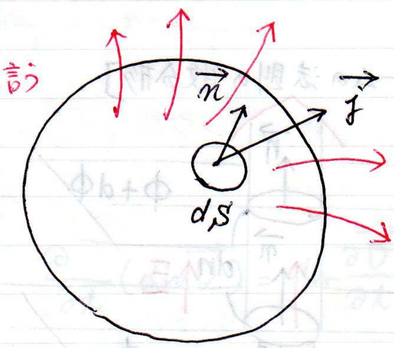
曲面 $S$ について

$$J = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS = \int_S j_n \, dS \quad —⑤$$

曲面 $S$ を通過する電流と言う

$dt$ 時間にこの面を通る電気量 $dQ$

$$dQ = J \cdot dt \quad —⑥$$



$$\therefore \quad J = \frac{dQ}{dt} \quad —⑦$$

面 $S$ を閉曲面とし、$S$ に包まれる部分の体積を $V$ とする
単位時間に流れ出る電気量

$$\int_S j_n \, dS = \int \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS \quad —⑧$$

電気量の減る割合

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\, dv \quad —⑨$$

電気量保存より

$$\int_S \vec{j}\cdot\vec{n}\cdot dS = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\, dv \quad —⑩$$

ガウスの発散定理より

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{j}\, dv = \iiint_V \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dv \quad —⑪$$

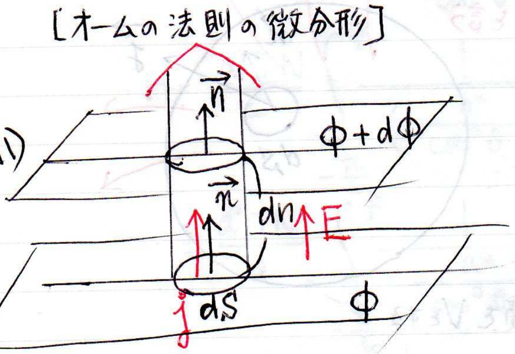
$$\iiint_V \left(\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dv = 0 \quad —⑫$$

$$\therefore\ \mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \boxed{\mathrm{div}\,\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad —⑬}$$

定常のとき $\mathrm{div}\,\vec{j} = 0$

[オームの法則の微分形]

(図1)




$$\phi - (\phi + d\phi) = r\left(\frac{dn}{dS}\right)\cdot dJ \quad —①$$

$$-d\phi = r\cdot dn\cdot \frac{dJ}{dS} \quad —②$$

$$\frac{dJ}{dS} = -\frac{1}{r}\frac{d\phi}{dn} \quad —③ \quad = -\sigma\frac{d\phi}{dn}$$

電流密度 $j$　　電場の強さ E

ともに電流の方向を向くベクトル量

$$\begin{cases} \dfrac{dJ}{dS} = j \\ -\dfrac{d\phi}{dn} = E \end{cases} \quad —④$$

$j = \sigma E \qquad \vec{j} = \sigma \vec{E}$ —⑤

[Jouleの法則の微分形]

(図1)の微小体積 $dv = dS \cdot dx$ —⑥

この部分のジュールの法則を適用すれば

$$dP = j\,dS\{\phi - (\phi + d\phi)\} \text{ —⑦}$$

$$= -j\,dS\frac{d\phi}{dx}dx = j\left(-\frac{d\phi}{dx}\right)dS \cdot dx \text{ —⑧}$$

$$= jE\,dv = \vec{j} \cdot \vec{E}\,dv \text{ —⑨}$$

単位体積中の消費電力 $u$

$$u = \frac{dP}{dv} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma \vec{E}^2 = \frac{\vec{j}^2}{\sigma} \text{ —⑩}$$

[電束電流]

$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}$ より

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{H}) = \mathrm{div}\,\vec{j} \text{ —①}$$

$$0 = \mathrm{div}\,\vec{j} \text{ —②}$$

一般的には $\mathrm{div}\,\vec{j} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ —③

$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$ —④ より ③へ代入 $\dfrac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\vec{D}) = \mathrm{div}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ —⑤

③へ代入

$$\mathrm{div}\,\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{ —⑥}$$

$$\therefore \mathrm{div}\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0 \text{ —⑦}$$

No.

Date 4 29

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$ —⑧ と書き改める

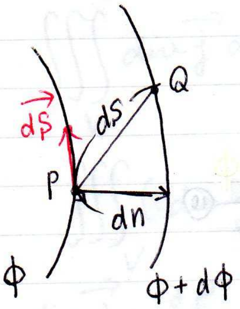
$\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (伝導電流) に対して

$\vec{j}_D = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ → 電束電流．変位電流

⇓

Maxwellにより導びかれた

電磁波の原因となる




電位差＝電場の仕事

$$\phi - (\phi + d\phi) = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \text{—①}$$

$$-d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \text{—②}$$

$$-d\phi = E_x dx + E_y dy + E_z dz \quad \text{—③}$$

$$-\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz\right) = E_x dx + E_y dy + E_z dz \quad \text{—④}$$

$$-d\phi = -\nabla \phi \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\therefore \quad \vec{E} = -\nabla \phi \quad \text{—⑤}$$

$\phi(x, y, z) = C$ 上では　　P点から等電位面上の変位 $d\vec{S}$ について

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \quad \text{—⑥}$$

$$= \nabla \phi \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{—⑦}$$

$\nabla \phi$ は等電位面に垂直である